INTRODUÇÃO AO ESTUDO DA EQUAÇÃO DE BALANÇO DA ENERGIA CINÉTICA TURBULENTA DA CAMADA LIMITE CONVECTIVA NA REGIÃO DA CAMPANHA/RS.

SILVA, L. G. C. [1], KIPPER, C. J.[2]

[1] Graduanda em Engenharia de Produção, Universidade Federal do Pampa (UNIPAMPA) – Bagé – RS – Brasil

[2] Curso de Licenciatura em Física, Universidade Federal do Pampa (UNIPAMPA) – Bagé – RS – Brasil

RESUMO

Este artigo é um estudo preliminar, através de uma bolsa de Iniciação Científica[1], das equações que descrevem o movimento dos fluídos. Aqui se pretende externar as suposições físicas e definições matemáticas, usadas para descrever o sistema, fluido, de maneira mais simples e de fácil entendimento para os estudantes. A equação dinâmica para a densidade espectral de energia cinética turbulenta na Camada Limite Convectiva (CLC), que modela o movimento do ar na atmosfera, é obtida de forma clássica através da equação de Navier-Stokes. Esta equação expressa a conservação de momento introduzida pelas equações do movimento da Lei de Newton. Este trabalho ainda está em andamento e pretende avaliar as variáveis atmosféricas na região da campanha do estado do Rio Grande do Sul.

Palavras-chave: Mecânica dos Fluidos; Conservação de momento; Equação de Navier-Stokes.

1 INTRODUÇÂO

Inicialmente, a descrição matemática básica para o escoamento de um fluído, também chamada de dinâmica de fluídos, desenvolvida por Euler (1741) foi corrigida para incluir as forças de viscosidade por Navier (1827) e Stokes (1945). A equação de Navier-Stokes descreve a velocidade de um fluído, em um ponto no tempo, é simplesmente a equação da segunda Lei de Newton para uma partícula do fluido. Ela iguala a aceleração de uma partícula do fluido com a força resultante exercida na partícula, devido ao gradiente de pressão, a viscosidade do fluido e a gravidade, por unidade de volume. No estudo inicial de mecânica dos fluídos, nos livros de engenharia, nos deparamos com a dificuldade encontrada na dedução e obtenção da equação de Navier-Stokes. Este trabalho visa facilitar o entendimento dos conceitos utilizados para a obtenção desta equação.

2 METODOLOGIA (MATERIAIS E MÉTODOS)

Para descrever o escoamento de fluidos pode-se utilizar a equação Navier-Stokes, a qual nos permite explicitar os campos de velocidade, determinar no escoamento a sua distribuição de velocidade em cada ponto e em cada instante de tempo, e determinar a pressão em uma partícula durante o escoamento. Através da Segunda Lei de Newton, com a resultante de forças de pressão, forças de atrito e força gravitacional, consegue-se deduzir a equação Navier-Stokes (BRUNETTI, 2008). Na metodologia foi realizada uma pesquisa bibliográfica para a fundamentação teórica do trabalho de pesquisa, visando uma pesquisa descritiva.

---

[1] Pesquisa financiada pelo Programa de Desenvolvimento Acadêmico (PDA) da Unipampa.

Essa investigação se deu em várias literaturas de mecânica dos fluídos, onde selecionamos os livros: Fundamentos da Mecânica dos Fluidos (MUNSON, 2004) e Mecânica dos Fluidos (POTTER, 2004). Como método utilizado destacamos a detecção da publicação que seria utilizada, que envolvesse a equação pretendida, objetivando o domínio sobre o tema.

3 RESULTADOS E DISCUSSÃO

O momento de uma partícula é uma grandeza vetorial calculada pelo produto da massa pela sua velocidade. A fim de encontrar a equação da conservação do momento, podemos reescrever a Lei de Newton para o movimento em termos do momento. Para isso, escrevemos a aceleração como a taxa de variação da velocidade no tempo e consideramos a massa constante, de modo

$$\overrightarrow{F_R} = m.\vec{a} = m.\frac{d\vec{V}}{dt} = \frac{d(m.\overrightarrow{V})}{dt} = \frac{d\vec{p}}{dt},$$

onde $m\boldsymbol{V}$ é o momento $\boldsymbol{p}$ e $\boldsymbol{F_R}$ é a resultante das forças que agem sobre a partícula do fluido. As forças que atuam sobre essa partícula são as forças de pressão, as forças de atrito e a força gravitacional. A partícula do fluido poderá ser entendida como um elemento de fluido infinitesimal. A equação de Navier-Stokes expressa a conservação de momento para um movimento de pequena escala, que ocorre em um fluido incompressível e irrotacional. O momento e a velocidade são grandezas vetoriais e descritas no espaço de coordenadas cartesiano tridimensional.

FORÇA DO GRADIENTE DE PRESSÃO: Define-se a pressão P por uma força F que comprime uma superfície, que está distribuída sobre uma área A, isto é, a pressão é exercida pela força sobre essa superfície. Pressão é uma grandeza escalar e a sua unidade no Sistema Internacional de Unidades é o Pascal. Em um movimento laminar de um fluido, seja a pressão uma função f(x) em torno do ponto x=a, no centro do elemento de volume *dv*,

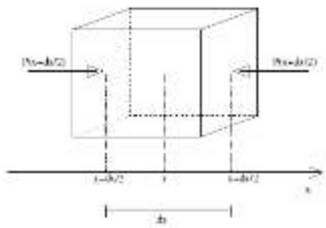

Figura 1. Pressões exercidas nas faces do elemento de volume *dv* na direção *x*.

Para descrever a pressão atuando em uma partícula de fluido em repouso, utiliza-se Expansão em Série de Taylor para funções analíticas, ou seja, representar a função por séries de potências, afim de que a função tenha derivada em todos os pontos. Devido a dx ser extremamente pequeno e, elevado a segunda potência ou mais, faz com que o mesmo se torne desprezível, de modo que a função terá apenas os termos de primeira ordem da série, na forma

$$f(x) = f(a) + \frac{\partial}{\partial x} f(a)(x - a).$$

Sendo os pontos $x = x + \frac{dx}{2}$ e $a = x$, substituindo os termos na equação de f(x) = P(x), temos

$$P\left(x + \frac{dx}{2}\right) = P(x) + \frac{\partial}{\partial x} P(x)\frac{dx}{2}\ .$$

Para a variação da pressão na coordenada x, utiliza-se o gradiente, que é uma derivada parcial na coordenada cartesiana tridimensional, dada por $\nabla P = \left(\frac{\partial}{\partial x}\hat{\imath}, \frac{\partial}{\partial y}\hat{\jmath}, \frac{\partial}{\partial z}\hat{k}\right)P$, que aplicada a função, será

$$\nabla P = P\left(x + \frac{dx}{2}\right) - P\left(x - \frac{dx}{2}\right),$$

$$\nabla P = P(x) + \frac{\partial}{\partial x}P(x)\frac{dx}{2} - P(x) + \frac{\partial}{\partial x}P(x)\frac{dx}{2},$$

dado por $\nabla P = \frac{\partial}{\partial x}P(x)dx$. Dessa forma, calcula-se a força atuando no volume de controle como o produto da pressão pela área da face perpendicular ao gradiente. Para a pressão na coordenada unidimensional x, temos $F(x) = \frac{\partial}{\partial x}P(x)dx\,dydz$. Assim, a função da força, nas coordenadas x, y e z pode ser expressa com o gradiente da pressão $F = \nabla P\ dv$, de modo que

$$F = \left(\frac{\partial}{\partial x}\ P(x) + \frac{\partial}{\partial y}\ P(y) + \frac{\partial}{\partial z}\ P(z)\right)(dxdydz).$$

FORÇA DE ATRITO: A força de atrito é a resistência ao movimento causada pela viscosidade. Essa resistência origina uma tensão de cisalhamento. Para entender o conceito, precisa-se perceber que a viscosidade é a “aderência” interna de um fluido e, a taxa de deformação de um fluido, é diretamente ligada à viscosidade do fluido. Os fluidos que se comportam dessa maneira são chamados de fluidos newtonianos. Considere um escoamento no qual as partículas do fluido se movem, onde u é a componente velocidade ao longo da coordenada x.

O Gradiente de velocidade representa o estudo da variação da velocidade no meio fluido em relação a direção mais rápida desta variação. A quantidade $\frac{du}{dy}$ é o gradiente de velocidade na direção x e pode ser interpretado como taxa de deformação, na forma $\tau_{yx} = \mu\frac{du}{dy}$ sendo $u = u(y)$. Portanto, o atrito entre as camadas do fluido depende linearmente do cisalhamento de velocidade, dado por $F = \mu\frac{AV}{H}$, sendo A a área, V a velocidade, H a altura e μ o coeficiente de proporcionalidade relacionado com a viscosidade. A tensão responsável pela transferência de momento é $\tau = \frac{F}{A} = \mu\frac{V}{H}$. Considerando uma superfície plana infinita, devido à espessura infinitesimal a tensão será $\tau_{yx} = \mu\frac{\partial u}{\partial y}$. No espaço tridimensional das velocidades (u, v, w) teremos 9 tensões diferentes correspondentes ao cisalhamento nas direções (x, y, z), são elas derivadas da Série de Taylor, na forma

$$\tau_x = \left(\frac{\partial\tau_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial\tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial\tau_{zx}}{\partial z}\right)dx.$$

Através da equação da tensão, calcula-se a força de atrito $F_x = \tau_x A$

$$F_x = \left(\frac{\partial\tau_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial\tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial\tau_{zx}}{\partial z}\right)dx\,dydz\ ;$$

$$F_x = \left(\frac{\partial}{\partial x}\mu\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y}\mu\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial z}\mu\frac{\partial u}{\partial z}\right)dxdydz\ ;$$

$$F_x = \mu\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right)dxdydz.$$

Utiliza-se o operador laplaciano na forma unidimensional como $\nabla^2 u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$. Assim, para força de atrito na coordenada x, tem-se $F_{ATx} = \mu\nabla^2 u\,dxdydz$. Para o espaço tridimensional utiliza-se: u é a velocidade na coordenada x, v é a velocidade na coordenada y e w é a velocidade na coordenada z, sendo o vetor velocidade dado por $\vec{V} = (u, v, w)$, o $\nabla^2 V = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2}$ e força de atrito escrita como

$$F_{AT} = \mu \nabla^2 V \, dxdydz.$$

FORÇA GRAVITACIONAL: Sendo a aceleração dada pela gravidade g e a massa pelo princípio de conservação de massa $\rho d\forall = \rho dxdydz$, dado que o volume é estabelecido como $\forall$. Obtém-se, para a coordenada x,

$$F_{Gx} = \rho dxdydz \, g_x.$$

EQUAÇÃO NAVIER-STOKES: Através da Segunda Lei de Newton, têm-se o somatório das forças em x dado por $\sum F_x = F_x + F_{ATx} + F_{Gx} = ma_x$. Para convenção de sinais, as forças que atuam para dentro da partícula são negativas e as que estão para fora são positivas, na forma unidimensional em x dada por

$$-\frac{\partial}{\partial x} P(x) dx \, dydz + \mu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) dxdydz + \rho dxdydz \, g_x = \rho dxdydz \frac{Du}{Dt}.$$

Como a massa específica é dada por $\rho = \frac{dm}{dv}$, sendo o volume $dv = dxdydz$, logo $dm = \rho dv$. A equação acima é dividida pelo volume $dxdydz$, na forma

$$-\frac{\partial}{\partial x} P(x) + \mu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) + \rho g_x = \rho \frac{Du}{Dt}.$$

Simplificando a equação acima se tem, para a coordenada x, a expressão

$$-\frac{\partial}{\partial x} P(x) + \mu \nabla^2 u + \rho g_x = \rho \frac{Du}{Dt}.$$

As equações podem ser simplificadas em uma única equação que descreve essa variação nas três coordenadas. A equação geral de Navier-Stokes é dada por

$$-\nabla P + \mu \nabla^2 V + \rho g = \rho \frac{DV}{Dt},$$

onde a força resultante sobre o elemento de volume é igual a taxa de variação temporal do momento no interior do volume mais o fluxo líquido de momento através da superfície do volume.

4 CONCLUSÃO

No estudo proposto, nesse projeto de Iniciação Científica, alcançar a equação de Navier-Stokes se mostrou um desafio a ser superado. Este trabalho se propôs a tornar a dedução aqui apresentada uma alternativa para o estudo de mecânica dos fluídos. Como o projeto está em andamento, considera-se que apenas uma etapa foi superada e que o desenvolvimento das equações, que modelam a equação dinâmica para a densidade espectral de energia cinética turbulenta na CLC, precisa ser alcançado. Portanto, este trabalho tem segmento com o estudo do decaimento da turbulência na Camada Limite Planetária.

5 REFERÊNCIAS

Brunetti, F. (2008). Mecânica dos Fluidos - 2ª ed. São Paulo: Pearson Prentice Hall

Munson, B. R., Yong, D. F., Okiishi, T. H. (2004). Fundamentos da Mecânica dos Fluidos. São Paulo: Edgard Blücher

Potter, M. C., Wiggert, D. C. (2004). Mecânica dos Fluidos. São Paulo: Cangage Learning